

天津商业大学 2023 年硕士研究生招生考试试题

专 业： 统计学

科目名称： 高等数学（714）

共 3 页 第 1 页

说明：答案标明题号写在答题纸上，写在试题纸上的无效。

一、选择题（1-10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1. $\Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2} dt$ ，则 $\Phi'(x) =$ () .

- (A) $\sqrt{1+x}$ (B) $\frac{\sqrt{1+x}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$ (D) $\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}$

2. 积分 $\int \cos^3 x dx =$ () .

- (A) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ (B) $-\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + C$
(C) $\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ (D) $-\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

3. 如果 $f'(6) = 10$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(6) - f(6-x)}{5x} =$ () .

- (A) -2 (B) 2 (C) -10 (D) 10

4. 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ ，则 $f'_u(1, 1)$ 与 $f'_v(1, 1)$ 分别为 () .

- (A) $\frac{1}{2}, 0$ (B) $0, \frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}, 0$ (D) $0, -\frac{1}{2}$

5. 设 $f(x, y)$ 连续，且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$ ，其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域，

则 $f(x, y) =$ () .

- (A) xy (B) $2xy$ (C) $xy + \frac{1}{8}$ (D) $xy + 1$

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 () .

- (A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 无穷间断点 (D) 跳跃间断点

7. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 2x & -1 & 2 \\ 2 & x & 1 & -1 \\ 3 & -2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 () .

- (A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4

天津商业大学 2023 年硕士研究生招生考试试题

专 业： 统计学

科目名称： 高等数学（714）

共 3 页 第 2 页

说明：答案标明题号写在答题纸上，写在试题纸上的无效。

8. 设矩阵 A 为 4 阶方阵，且 $|A| = -1$ ，则 $|(2A)^{-1} + A^*| = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $-\frac{1}{16}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $-\frac{1}{8}$

9. 设方程组
$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ k^2x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$
 的系数矩阵为 A ，且有 3 阶非零矩阵 B ，满足 $AB = O$ ，则 (\quad) .

(A) $k = 2$ 且 $|B| = 0$

(B) $k = 2$ 且 $|B| \neq 0$

(C) $k = 1$ 且 $|B| = 0$

(D) $k = 1$ 且 $|B| \neq 0$

10. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 及 η_1, η_2, η_3 为 R^3 的两个基，并且
$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2 \\ \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 \\ \eta_3 = -\xi_3 \end{cases}$$
；3 维向量 α 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的坐标

为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ，则 α 在基 η_1, η_2, η_3 下的坐标为 (\quad) .

(A) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

二、计算题（11-18 小题，共计 75 分）

11. (7 分) 求下列曲线的渐近线： $f(x) = x \ln(e + \frac{1}{x})$.

12. (9 分) 求函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

13. (9 分) 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x - 4$ 的通解.

14. (9 分) 若 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定的隐函数，求曲线 $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程.

15. (9 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ 的收敛域及和函数.

天津商业大学 2023 年硕士研究生招生考试试题

专 业： 统计学

科目名称： 高等数学（714）

共 3 页 第 3 页

说明：答案标明题号写在答题纸上，写在试题纸上的无效。

16. (8 分) 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 和向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有

相同的秩，且 β_3 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，求 a, b 的值.

17. (12 分) 设 A 为 3 阶实对称矩阵， A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8$ ； $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 的两个线性

无关的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求属于特征值 λ_3 的线性无关特征向量；

(2) 求矩阵 A .

18. (12 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = ax_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_3 (b > 0)$. 二次型的矩阵 A 的特征值之和为 4，特征值的乘积为 0.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形，写出所用的正交变换及二次型对应的标准形.

三、证明题（19-21 小题，共计 25 分）

19. (8 分) 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，证明 $\sin x + \tan x > 2x$.

20. (9 分) 设 $0 < a < b$ ，证明 $\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a}$.

21. (8 分) 设 A 为 2 阶方阵，2 维列向量 $\alpha, A\alpha$ 线性无关， $A^2\alpha = \alpha - A\alpha$. 设矩阵 $B = (\alpha, A^3\alpha)$,

证明 $r(B) = 2$.